

LES EQUACIONS DE MOVIMENT EN RELATIVITAT GENERAL

Josep Llosa, Universitat de Barcelona,
Lluís Mas, Universitat de Granada,
Enric Verdaguer, Universitat Autònoma de Barcelona (*)

I. Plantejament del problema

La teoria de la Relativitat General (TRG) és una teoria de camps *no lineal* que inclou la interacció gravitacional i que ens lliga les fonts del camp o camps amb el camp gravitacional gràcies a les equacions d'Einstein:

$$(I-1) \quad S^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad ; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

on $g^{\mu\nu}$ és el tensor mètric de l'espai-temps, $R^{\mu\nu}$ el tensor de Ricci que depèn del tensor mètric fins a les segones derivades, G és la constant gravitacional, c és la velocitat de la llum i $T^{\mu\nu}$ és el tensor impuls-energia que depèn de la mètrica i de les característiques tant físiques com de posició de les fonts. El conjunt de les equacions és un sistema d'equacions diferencials en derivades parcials de segon ordre no lineal. Trobar-li solucions, resoldre el problema de Cauchy, estudiar l'estabilitat i la unicitat de solucions, és francament difícil.

Per tal de veure que les equacions de moviment i les equacions del camp ara no estaran deslligades, comencem per deduir que en el cas de teories de camps lineals (la del camp electromagnètic de Maxwell o la del camp gravitacional de Newton) sí que estan deslligades⁽¹⁾:

Raonem per reducció a l'absurd; donades unes condicions inicials per a una partícula, trobarem el seu moviment a partir d'unes equacions deduïdes de les del camp; donades unes altres condicions per a una altra

(*) Actualment a: Department of Applied Mathematics and Astronomy, Universitat de Cardiff, País de Galles.

partícula, també trobaríem el seu moviment; el conjunt d'ambdós moviments també serà solució si la teoria de camps és lineal, o sigui que no hi ha interacció entre ambdues partícules i això no pot ésser si les partícules són fonts del camp. Efectivament, per a les teories citades les equacions de moviment es postulen a part i són, en el cas del camp electromagnètic, les equacions de Lorentz i, en el cas del camp gravitacional, les equacions de Newton. En el cas de la TRG la dificultat no es presenta, ja que la teoria no és lineal. A més, com que el primer terme de les equacions d'Einstein (I-1) compleix la identitat de Bianchi:

$$(I-2) \quad \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R^\alpha{}_\alpha \right)_{;\nu} = 0$$

el tensor impuls-energia del segon membre ja no pot ésser qualsevol, sinó que ha d'ésser conservatiu, la qual cosa vol dir que

$$(I-3) \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

Aquestes equacions són les que posen limitacions al moviment de les fonts. En un primer moment Einstein suposà com a hipòtesi suplementària que una partícula de prova es mouria segons una geodèsica del l'espai-temps, però aviat ell i altres s'adonaren de les limitacions introduïdes per (I-3), ⁽²⁾ i la conclusió fou que la intuïció d'Einstein no era una hipòtesi sinó un teorema en el cas que la partícula de prova fos monopolar. Monopolar vol dir que, entre les integrals ⁽³⁾

$$(I-4) \quad \int (-g)^{1/2} T^{\mu\alpha} d^3x$$

estes al volum de la partícula de prova, en passar al límit d'aquest volum tendint a zero, n'hi ha alguna que no s'anulla. Si a més, en fer el dit límit, alguna de les integrals

$$(I-5) \quad \int (-g)^{1/2} \delta x^\rho T^{\mu\alpha} d^3x \quad ; \quad \delta x^\rho = x^\rho - \bar{X}^\rho(s)$$

tampoc no s'anulla, la partícula serà monopolar, dipolar, i així successivament, afegint-hi δx^ρ .

El teorema més fort en aquest camí es va demostrar més tard ⁽⁴⁾ i diu això que segueix: Donat un sistema de partícules monopolars en interacció, que donen un tensor impuls-energia del tipus

$$(I-6) \quad T^{\mu\nu} = (-g)^{1/2} T^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_i \, m_i^{\mu\nu} \cdot \delta^4(x^\rho - z_i^\rho) \quad ; \quad z_i^\rho = z_i^\rho(\tau_i)$$

les partícules s'han de moure seguint una geodèsica de la mètrica de l'espai-temps que elles mateixes determinen, i el tensor $m_i^{\mu\nu}$ de (I-6) ha d'ésser

ser de la forma

$$(I-7) \quad m_i^{\kappa\nu} = m_i (g_{\alpha\beta} v_i^\alpha v_i^\beta)^{-1/2} \cdot v_i^\kappa v_i^\nu ; \quad v_i^\kappa = \frac{dz_i^\kappa}{d\tau_i}, \quad m_i = \text{constant}$$

La demostració d'aquest teorema inclou com a hipòtesi que la mètrica sigui finita arreu, fins i tot en els punts ocupats per les partícules; però, per ara, no hi ha cap demostració rigorosa que això sigui així per a les solucions de les equacions d'Einstein referents a fonts puntuals. Aquesta dificultat sembla desaparèixer si els cossos no són puntuals, per la qual cosa el teorema ha de donar des del punt de vista físic un resultat si més no aproximat a la realitat.

En cas que els cossos no siguin puntuals, cal incloure la possibilitat d'estructures dipolars o més complicades, per a les quals també hi ha teoremes semblants a l'enunciat ⁽⁵⁾ que, a part de donar les equacions de moviment, deixen més llibertat per a l'estructura interna dels cossos. Tots aquests teoremes es basen en un lema degut a Mathisson ⁽⁶⁾, que afirma que és certa la igualtat:

$$(I-8) \quad \int_D T^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} d^4x = \int_L \sum_n (-1)^n m^{\alpha\beta\ldots\lambda, \mu\nu} D_\alpha D_\beta \ldots D_\lambda \varphi_{\mu\nu} d\tau$$

on **D** és el domini de l'espai-temps que ocupa el cos o cossos en consideració, **L** una línia de temps dins aquest domini i $m^{\alpha\beta\ldots\lambda, \mu\nu}$ un tensor que depèn de **D**, **L** i el tensor $T^{\mu\nu}$. L'equació de la línia **L** és la que es dedueix de les condicions (I-3), les quals sembla que donin una guia per al moviment del cos o dels cossos que envolten l'esmentada línia. $\varphi_{\mu\nu}$ és una funció tensorial qualsevulla de classe C^∞ i desenvolupable en sèrie de Taylor. És un fet, doncs, demostrat que l'estructura interna influeix sobre el moviment del cos o dels cossos; de tota manera, fins ara no és el coneixement d'aquesta estructura allò que millora l'estudi de les equacions de moviment sinó al contrari, és a dir, del coneixement experimental del veritable moviment es dedueixen els valors d'aquelles dades internes que fan el millor ajust a les fórmules teòriques; això tampoc és res de nou, puix que, aplicant les teories de Newton, és a partir de dades dels satèl·lits que es determinen les característiques multipolars de la Terra.

Assentats així els pocs resultats exactes que hom coneix, anem a veure quins són els mètodes d'aproximació que donen resultats més concrets.

II. Mètodes d'aproximació. Consideracions generals

Tots els resultats exposats fins ara fan referència a la identitat de Bianchi (I-2) i a la seva conseqüència (I-3); per a resoldre el problema del moviment cal trobar mètriques $g_{\mu\nu}$ que satisfacin les equacions d'Einstein i per tant les equacions (I-3) dites de conservació. L'única manera que s'ha trobat de fer això és en passos successius: primer hom troba la mètrica a l'ordre més baix que fem servir per a deduir les equacions de moviment també a l'ordre més baix, i d'aquestes passem al segon ordre de la mètrica, i així anar pujant. Què vol dir l'ordre, ho veurem d'aquí a un moment en descriure els diferents mètodes d'aproximació.

Sigui el que sigui el mètode, hi ha dues característiques o dificultats greus per a tots:

- 1) Per a cap dels mètodes no està demostrada la convergència de la sèrie que origina; en alguns casos el desenvolupament va donant termes cada vegada més petits; en altres, però, no és gens evident que sigui així.
- 2) Els diferents càlculs associats a cada mètode no donen mai un algorisme i, si bé anar augmentant l'ordre no té cap dificultat de principi, porta molt aviat a desenvolupaments prohibitius per la seva llargària.

Hi ha dues maneres molt diferents de fer les aproximacions:

- a) Agrupar els termes segons la potència de la constant de gravitació G , que dona l'anomenada aproximació de moviment ràpid.
- b) Agrupar els termes segons la potència d' $1/c$, que dona els mètodes d'aproximació lenta.

En agrupar els termes de diferents maneres és evident que hom no podrà aplicar a un cas determinat qualsevol dels dos mètodes; els qualificatius ja comencen a separar els casos en què serà aplicable cada un d'ells; bé que teòricament l'aproximació ràpida també es pot aplicar a casos de moviment lent, no és certa la inversa.

III. Aproximació de moviment ràpid ⁽⁷⁾

El mètode és anàleg al que hom empra en electrodinàmica per al cas de dues càrregues elèctriques i que condueix als coneguts potencials de Liénard-Wiechert, i (com en aquest cas) presenta la dificultat de no tenir resolt el problema de Cauchy o de dades inicials que determinen una solució amb tot el que això implica sobre el determinisme del problema.

Anem a descriure amb un cert detall com s'obté el primer ordre ⁽⁴⁾. És convenient que hom escrigui les equacions de Einstein (I-1) d'aquesta altra manera:

$$(III-1) \quad -2 G_{\mu}^{\nu} = \partial_{\sigma} U_{\mu}^{[\nu\sigma]} - t_{\mu}^{\nu} = 16\pi G \tilde{E}_{\mu}^{\nu}$$

on

$$(III-2) \quad U_{\mu}^{[\nu\sigma]} = (-2)^{1/2} g_{\mu\lambda} \cdot \partial_{\rho} [q(q^{\lambda\sigma} q^{\nu\rho} - q^{\rho\sigma} q^{\nu\lambda})]$$

i $t_{\mu\nu}$ és el pseudo-tensor de moment-energia d'Einstein, bé que aquí el més important és que és quadràtic i homogeni en les primeres derivades del tensor mètric, i per tant totes les segones derivades queden dins el terme $U_{\mu}^{[\nu\sigma]}$.

Els desenvolupaments del tensor mètric i del tensor impuls-energia són de la forma

$$(III-3) \quad g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^N n g_{\mu\nu} = {}^N g_{\mu\nu} \quad ; \quad \tilde{E}^{\mu\nu} = \sum_{n=1}^N n \tilde{E}^{\mu\nu}$$

on la n davant cada terme fa referència a la potència de G que porten.

L'aproximació $N+1$ de les equacions (III-1) és,

$$(III-4) \quad \sum_{n=1}^{N+1} (\eta_{\mu\lambda} \partial_{\rho\sigma} n K^{[\lambda\rho][\nu\sigma]} - 2 \cdot n \Lambda_{\mu}^{\nu}) = 16\pi G \sum_{n=1}^{N+1} n \tilde{E}_{\mu}^{\nu}$$

on

$$(III-5) \quad n K^{[\lambda\rho][\nu\sigma]} = [\eta^{\nu\alpha} (\eta^{\lambda\sigma} \eta^{\rho\beta} - \eta^{\lambda\beta} \eta^{\rho\sigma}) - \eta^{\sigma\alpha} (\eta^{\lambda\nu} \eta^{\rho\beta} - \eta^{\lambda\beta} \eta^{\rho\nu})] \cdot (n g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} n g_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu})$$

És únicament en aquest terme K que apareixen les ${}_N g_{\mu\nu}$ i a més linealment; el terme Λ_{μ}^{ν} que no explicitem conté $g_{\mu\nu}$ d'ordres inferiors en forma no lineal, els quals, tanmateix, ja han d'ésser coneguts pel càlcul anterior de l'ordre N . A l'ordre zero hom té:

$$\eta_{\mu\lambda} \partial_{\rho\sigma} K^{[\lambda\rho][\nu\sigma]} = 16\pi G \cdot \tilde{E}_{\mu}^{\nu}$$

Les condicions d'integrabilitat de les equacions (III-4) són

$$(III-6) \quad 2 \cdot \sum_{n=1}^{N+1} \partial_{\nu} n \Lambda_{\mu}^{\nu} = -16\pi G \sum_{n=1}^{N+1} \partial_{\nu} n \tilde{E}_{\mu}^{\nu}$$

i si tenim en compte les identitats de Bianchi (I-2) es transformen en

$$(III-7) \quad \sum_{n=1}^{N+1} \partial_\nu n \Lambda_\mu^\nu = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \partial_\mu m g_{\rho\sigma} \sum_{n=1}^{N+1-m} n G^{\rho\sigma}$$

Si suposem que hem resolt fins a l'ordre N les equacions (III-4) també dins la mateixa aproximació de les equacions de Einstein (III-1), obtenim

$$(III-8) \quad \sum_{n=1}^m n G^{\rho\sigma} = -8\pi G \sum_{n=1}^m n \tilde{\mathcal{E}}^{\rho\sigma}, \quad m \leq N$$

la qual cosa, juntament amb les condicions d'integrabilitat a l'ordre $N+1$, dóna

$$(III-9) \quad \sum_{n=1}^{N+1} \partial_\nu n \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\nu - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^{N+1-m} \partial_\mu m g_{\rho\sigma} n \tilde{\mathcal{E}}^{\rho\sigma} = 0$$

Aquesta és una condició sobre el tensor de matèria a l'ordre $N+1$ on sols intervenen els coeficients de la mètrica a l'ordre N o més baix, que és allò que hom pretenia: determinar el tensor de matèria i les equacions de moviment a l'ordre $N+1$ abans de conèixer el tensor mètric al mateix ordre. A l'ordre zero tenim, doncs,

$$(III-10) \quad \partial_\nu \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\nu = 0$$

i utilitzant un camp de vectors ξ^μ suficientment continu i que s'anulli a l'infinit tant d'espai com de temps, tenim

$$(III-11) \quad \int \eta_{\mu\rho} m_i^{\rho\kappa} \partial_\nu \tilde{\mathcal{E}}^\kappa(\tau_i) d\tau_i = 0$$

d'on

$$(III-12) \quad m_i^{\rho\sigma} = m_i v_i^\rho v_i^\sigma$$

i també, finalment,

$$(III-13) \quad \dot{m}_i = 0 \quad \dot{v}_i^\mu = 0$$

O sigui que a l'ordre zero els coeficients m_i són constants i les partícules es mouen en línia recta, tal com ha d'ésser. Fixem-nos que no hem emprat mai una condició de coordenades, però, si anàvem a l'ordre següent, sí que hi sortiria.

La condició de coordenades també està lligada a les identitats de Bianchi que ens permeten de donar quatre condicions sobre el tensor mètric abans de resoldre el problema del moviment a cada ordre fora

del zero; hi ha una gran llibertat per a escollir aquestes condicions, que està relacionada amb la llibertat que tenim en TRG per a escollir el sistema de coordenades. Aquesta llibertat teòricament tan bonica, a la pràctica presenta la dificultat que costa molt d'estar segur que les coordenades que hom utilitza en fer les mesures amb els diferents aparells sigui precisament aquell sistema de coordenades que hom ha fixat per a resoldre les equacions d'Einstein.

L'estudi del segon ordre presenta una dificultat. Hem deduït que les partícules es mouen sobre rectes i per tant sobre aquestes línies el tensor mètric serà infinit; i, en tractar el segon ordre, no té sentit que el tensor mètric sigui infinit en uns punts on no hi ha partícules, ja que ara no es mouran en línia recta. Això s'arregla si considerem que l'equació (III-4) no és una equació per a cada ordre separatament, sinó que per a un ordre determinat inclou també tots els ordres inferiors; si bé llavors deixa d'ésser lineal en les incògnites, no tindrem ja la dificultat esmentada. De què serveix llavors resoldre els ordres inferiors? Alguns dels resultats es podran conservar, però d'altres no; exemple: per a l'ordre 1 el resultat (III-12) és correcte, però no el (III-13) ja que ara el segon membre no serà zero sinó un terme d'ordre superior que s'afegeix al corresponent ${}_2m_1^{\alpha\beta}$. De totes maneres les equacions tenen ara moltes més incògnites i no són lineals, i, per tant, són tan difícils de resoldre que en aquest cas concret no hi ha encara solucions conegudes al'ordre dos, totalment explícites.

IV. Aproximació d'Einstein-Infeld-Hoffmann ⁽⁸⁾

És el mètode més antic, bé que no l'únic, d'aproximació de moviment lent. Cal fer notar que els seus resultats s'empren per al càlcul d'òrbites a la mecànica celest planetària.

Vegem quines són les característiques de l'aproximació de moviment lent i que la diferencien de l'anterior. El que ara es pretén és d'obtenir com a primeres equacions de moviment les equacions de Newton i al següent ordre les anomenades equacions postnewtonianes. Abans això no era així, perquè allò que obteníem com a primeres equacions eren (III-13) i a l'ordre següent ja sortirien termes amb $1/c$ que evidentment no surten a la teoria de Newton. Per a obtenir aquest resultat hem de desenvolupar els termes en sèrie de potències d' $1/c$ i no segons la constant d'acoblament G .

Una altra hipòtesi fonamental és de tractar la coordenada temporal d'una manera diferent a les coordenades espacials, és a dir, quan derivem respecte a la coordenada zero o temporal un terme determinat, el resultat serà un terme d'un ordre superior; això ve del fet que la coordenada temporal conté un factor c . En el mètode d'aproximació ràpida, això no és

cert.

Una magnitud determinada es desenvolupa com abans,

$$(IV-1) \quad g_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^N n g_{\mu\nu}$$

ara, però, el subíndex n fa referència a la potencia d' $1/c$ que va associada amb cada terme. Per exemple, per al tensor mètric tindrem

$$(IV-2) \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

amb

$$h_{\alpha\beta} = {}_1 h_{\alpha\beta} + {}_2 h_{\alpha\beta} + \dots$$

Comparant el moviment newtonià i el geodèsic a la TRG d'una partícula de prova en els seus primers termes, és fàcil de comprovar que les $h_{\alpha\beta}$ comencen en els ordres següents

$$(IV-3) \quad {}_2 h_{00}, \quad {}_2 h_{0i}, \quad {}_1 h_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

i així ho admetrem perquè es compleixi la volguda identitat amb les equacions de Newton al primer ordre de les equacions de la TRG. Tot això que hem dit en aquest apartat, fins ara, fa referència a qualsevol de les aproximacions de moviment lent. Precisem ara les característiques de l'aproximació d'Einstein-Infeld-Hoffmann (EIH) seguint les idees de la referència ⁽¹⁾ d'Infeld-Plebanski.

El mètode treballa amb cossos puntuals, però els punts s'obtenen a partir d'un pas al límit de cossos amb unes dimensions determinades i aquest pas al límit ha d'ésser independent del tensor impuls-energia que descriu el cos no puntual. Per tant la conclusió serà que considerar els cossos com a punts serà una bona aproximació o no segons la dimensió dels cossos i la distància entre ells, independentment de llur constitució interna. Com es fa aquest pas al límit? La clau del procediment rau en la definició d'allò que en EIH es diu "una bona funció δ ". Recordem la definició de la funció δ en una dimensió: és una "funció" que compleix les propietats següents:

1. $\delta(x)$ es pot diferenciar formalment tantes vegades com hom vulgui.
2. Per a $x \neq 0$, $\delta(x) = 0$ mentre que per a $x = 0$ hom té $\delta(0) = \infty$.
3. Per a un entorn arbitrari $E(x_0)$ de x_0 i per a una funció arbitrària $f(x)$ contínua a x_0 hom té

$$(IV-4) \quad \int_{E(x_0)} \delta(x-x_0) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) \cdot f(x) dx = f(x_0)$$

La dificultat es presenta quan en fer el límit cap al punt surten integrals del tipus

$$(IV-5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x)}{|x|^p} dx, \quad p > 0$$

on la $f(x)$ no és contínua per a $x = 0$ i que generalment es consideren divergents. Perquè el mètode funcioni cal que aquestes integrals puguin prendre els valors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \frac{\hat{\delta}(x)}{|x|^p} = 0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \frac{\hat{\delta}(x)}{|x|^p} = \omega_p$$

i perquè sigui així les noves funcions deltes han de satisfer els axiomes:

1. Igual que abans.
2. $\hat{\delta}(x) = 0$ si $x \neq 0$; $\hat{\delta}(0)$ indeterminat.
3. Igual que abans.
4. Per a un cert p hom té que

$$(IV-6) \quad \int_{E(0)} \frac{\hat{\delta}(x)}{|x|^p} dx = \omega_p$$

on ω_p és una quantitat fixada d'antuvi i que si canvia, canviaria la definició de la corresponent $\hat{\delta}$.

Aquestes "bones funcions $\hat{\delta}$ " es poden generalitzar al nombre de dimensions necessari. Qüestions matemàtiques més precises sobre aquestes "bones funcions $\hat{\delta}$ " es poden trobar als llibres de distribucions (⁹).

Suposant que amb les "bones funcions $\hat{\delta}$ " hem demostrat que el pas al límit puntual no depèn del tensor impuls-energia, ens quedarà com abans el tensor següent, que actua com a font:

$$(IV-7) \quad T^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n m_i^{\mu\nu} \cdot \hat{\delta}(x^0 - z_i^0) \cdot \dot{z}_i^\mu \dot{z}_i^\nu$$

Tenint present el desenvolupament de la quadrirelocitat

$$(IV-8) \quad \dot{z}_i^\mu = \dot{z}_i^\mu + z_i^\mu \dot{z}_i^\mu + \dots$$

i el que es dedueix per a la massa per consideracions newtonianes

$$(IV-9) \quad m_i = {}_2m_i + \dots$$

veiem que el desenvolupament de les components de (IV-7) dóna

$$(IV-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{E}}^{00} = {}_2\bar{\mathcal{E}}^{00} + {}_3\bar{\mathcal{E}}^{00} + \dots \\ \bar{\mathcal{E}}^{0i} = {}_3\bar{\mathcal{E}}^{0i} + {}_4\bar{\mathcal{E}}^{0i} + \dots \end{array} \right. ; \quad \bar{\mathcal{E}}^{ij} = {}_4\bar{\mathcal{E}}^{ij} + \dots$$

Ens queda encara la possibilitat de simplificar els càlculs utilitzant una adequada condició de coordenades tal que respecti els resultats sobre ordres inicials trobats fins ara. Es demostra que aquesta llibertat ens permet d'anul·lar els termes que dins la mètrica i les equacions de moviment correspondrien a l'ordre següent al primer i al tercer; veurem una mica la demostració en estudiar el mètode d'aproximació vinent.

Amb tot això que hem dit, els càlculs concrets comencen prenent les equacions d'Einstein precisament amb la mateixa forma que en l'aproximació ràpida (III-4)

$$\sum_{n=1}^{N+1} \left(\eta_{\mu\lambda} \cdot \partial_{\rho} \gamma_n K^{[\lambda\rho][\nu\sigma]} - 2\gamma_n \Lambda_{\mu}^{\nu} \right) = 16\pi G \sum_{n=1}^{N+1} \gamma_n \bar{\mathcal{E}}_{\mu}^{\nu}$$

És a l'hora d'agrupar termes dins cada component, però ara ho farem de diferent manera a causa de la diferent valoració que comporta el mètode; per exemple, per al tensor $K^{[\lambda\rho][\nu\sigma]}$ tenim els desenvolupaments

$$(IV-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} K^{ij,mn} = {}_1K^{ij,mn} + \dots \\ K^{0i,0j} = {}_1K^{0i,0j} + \dots \end{array} \right. ; \quad K^{0i,mn} = {}_2K^{0i,mn} + \dots$$

Les equacions de moviment al primer ordre són les de Newton, resultat imposat d'entrada, i les següents són anomenades postnewtonianes, emprades actualment per al càlcul d'òrbites de satèl·lits. S'ha arribat fins a dos ordres posteriors a l'ordre newtonià, sense comptar els ordres que hem dit que s'anul·len.

V. Aproximació de Chandrasekhar ⁽¹⁰⁾

És una altra aproximació de moviment lent, que no fa però el pas al límit puntual sinó que es queda amb cossos constituïts per fluid perfecte i de localització i dimensions indeterminades. És en la línia de treballs iniciats per Fock i Papapetrou; el mètode inclou consideracions sobre el

moviment interior del cos i permet un estudi més físic en no tenir les limitacions que imposa el pas al límit del paràgraf anterior; en particular no és necessària cap simetria esfèrica com sembla que queda implícitament obligada en el cas anterior, ja que el pas al límit fa sobreentendre l'existència d'isotropia.

Per a un fluid perfecte, la definició adequada del tensor impuls-energia a la TRG és

$$(V-1) \quad T^{\mu\nu} = \rho (c^2 + \pi + \frac{p}{\rho}) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

on p és la pressió, u_μ la quadrivelocitat d'un element del fluid i $\rho_0 = \rho (1 + \pi/c^2)$ és la densitat de massa en repòs del fluid. Com que el fluid és elàstic, pot tenir energia elàstica de compressió (energia interna) i d'aquí que el ρ_0 inclogui la massa corresponent a aquesta energia. Com que aquesta energia interna pot canviar, la massa en repòs d'un fluid no és pas constant; per a ρ sí que hi ha una equació de conservació, i π és la densitat d'energia interna per unitat de ρ ; tant ρ com π són escalars.

Veiem ara que les identitats de Bianchi (I-2) permeten de relacionar la conservació de la massa amb la d'energia; en efecte, aplicant (I-2) a (V-1) obtenim,

$$(V-2) \quad \left[\rho (c^2 + \pi + \frac{p}{\rho}) u^\kappa \right]_{;\mu} u^\nu + \rho (c^2 + \pi + \frac{p}{\rho}) u^\kappa u^\nu_{;\mu} - g^{\kappa\nu} p_{;\mu} = 0$$

equació que, projectada sobre la quadrivelocitat, ens dóna els resultats

$$(V-3) \quad (\rho u^\kappa)_{;\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^\kappa [\pi_{;\mu} + p \cdot (\frac{1}{\rho})_{;\mu}] = 0$$

La segona és la conservació de l'entropia, i veiem doncs que la conservació de la massa és condició necessària i suficient per a la conservació de l'energia; d'una manera més coneguda, la segona es pot escriure,

$$(V-4) \quad \frac{d\pi}{dt} = -p \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Ara ens convé d'escriure les equacions d'Einstein (I-1) en la forma

$$(V-5) \quad R_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad , \quad T \equiv T^\mu{}_\mu$$

i dins el tensor de Ricci ens convé de separar els termes en derivades sego-

nes de la mètrica

$$(V-6) \quad R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\nu,\alpha\beta} + g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\alpha,\nu\beta} - g_{\nu\beta,\mu\alpha}) + \dots$$

Per al tensor mètric el desenvolupament com abans és

$$(V-7) \quad g_{\mu\nu}^N = \sum_{n=0}^N n g_{\mu\nu} \quad , \quad \partial g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

quedant per a les equacions (V-5) a l'ordre N i components d'espai

$$(V-8) \quad \Delta g_{ij}^N = (W_{ij} + W_{ji}) + S_{ij}^N$$

on

$$(V-9) \quad W_i = g_{ik,k} - \frac{1}{2} g_{kk,i} \quad ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i}$$

El terme S_{ij}^N és d'una forma explícita molt llarga, però tan sols conté termes de la mètrica que han d'ésser coneguts dels ordres inferiors. Anàlogament per a les components amb índexs d'espai i de temps tenim

$$(V-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta g_{oi}^{N+1} - W_{oi}^{N+1} - W_{io}^N = S_{oi}^{N+1} \\ W^{N+1} = g_{oj,j}^{N+1} - \frac{1}{2} g_{jj,o}^N \end{array} \right.$$

i, per a la component estrictament temporal,

$$(V-11) \quad \Delta g_{oo}^{N+2} - 2 W_{io}^{N+1} - g_{ij}^N g_{oo,ij}^2 + W_i^N g_{oo,ij}^2 = S_{oo}^{N+2}$$

Les equacions (V-8, 10, 11) permeten el càlcul de $g_{ij}^N, g_{oi}^{N+1}, g_{oo}^{N+2}$ excepte funcions harmòniques, sempre que es coneguin els ordres inferiors. En les aproximacions de moviment lent els coeficients de la mètrica vénen sempre d'equacions de tipus Poisson, la qual cosa vol dir que els efectes retardats són, dins cada ordre, d'un ordre superior.

Quines són les condicions d'integrabilitat de les equacions escrites? Derivant (V-8) respecte de x^i , i tenint present la (V-9), tenim

$$(V-12) \quad S_{kj,k} - \frac{1}{2} S_{kk,j} = 0$$

que és una de les condicions buscades; recordant allò que hem dit sobre les S_{ij} , aquesta condició s'ha de complir a l'ordre inferior de l'aproximació i és precisament la seva imposició allò que dona les equacions de movi-

ment al citat ordre.

Si suposem que es compleixen, anem a veure com les $\overset{N}{W}_i$ es poden considerar funcions arbitràries; de la contracció de (V-8) i emprant (V-12) obtenim,

$$(V-13) \quad \Delta \left(\overset{N}{g}_{ij,j} - \frac{1}{2} \overset{N}{g}_{jj,i} \right) = \overset{N}{S}_{ij,j} - \frac{1}{2} \overset{N}{S}_{jj,i} + \Delta \overset{N}{W}_i$$

o sigui que si es compleix (V-12) recuperem la definició (V-9); d'aquesta manera, si a (V-8) prenc una $\overset{N}{W}_i$ arbitrària, la mètrica que obtindré serà tal que la $\overset{N}{W}_i$ complirà (V-9), excepte funcions harmòniques.

D'una manera semblant s'ha de verificar,

$$(V-14) \quad \overset{N+1}{S}_{0K,K} - \frac{1}{2} \overset{N}{S}_{KK,0} = 0$$

ja que a partir de (V-10) podem escriure

$$(V-15) \quad \Delta \left(\overset{N+1}{g}_{0K,K} - \frac{1}{2} \overset{N}{g}_{KK,0} \right) = \overset{N+1}{S}_{0K,K} - \frac{1}{2} \overset{N}{S}_{KK,0} + \Delta \overset{N+1}{W}$$

i amb el resultat anterior recuperem la definició de $\overset{N+1}{W}$ donada a (V-10) i per tant $\overset{N+1}{W}$ és també una funció arbitrària.

L'elecció d'aquestes quatre funcions és allò que hem anomenat condició de coordenades.

Tenint present que a l'aproximació de moviment lent hem de recuperar al primer ordre les equacions de Newton, els primers termes adequats per al tensor impuls-energia són

$$(V-16) \quad \overset{-2}{T}_{00} = \overset{-2}{T}^{00} = \rho c^2 \quad ; \quad \overset{-1}{T}^{0i} = -\overset{-1}{T}_{0i} = \rho v^i c \quad ; \quad \overset{-1}{T}^{ij} = \overset{-1}{T}_{ij} = \rho v^i v^j + p \delta^{ij}$$

Mirem ara si amb aquests valors podem començar el càlcul de la mètrica; hem de prendre $N = 0$; per a aquest valor ni (V-8) ni (V-10) no tenen sentit i per tant no cal de moment fer una elecció de W 's. La (V-11) dóna

$$(V-17) \quad \Delta \overset{2}{g}_{00} = 8\pi G \overset{-2}{T}_{00} = 8\pi G \rho$$

$$(V-18) \quad \overset{2}{q}_{\infty} = -2\mathcal{U}$$

amb $\mathcal{U}$ igual al potencial gravitacional newtonià, $\Delta \mathcal{U} = -4\pi G\rho$. Aquest resultat és el punt de partida de les successives aproximacions postnewtonianes; l'anul·lació del terme $\overset{1}{q}_{\infty}$ és la causa que els termes diferents de les components del tensor mètric vagin d'un ordre al que fa dos més. Les equacions de moviment, tenint present que

$$(V-19) \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\nu} T^{\rho\mu}$$

donen, per a la component temporal,

$$(V-20) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) = 0$$

que no és sinó l'equació de continuïtat de Newton; les components d'espai donen

$$(V-21) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i v^j) + \frac{\partial p}{\partial x^i} - \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^i} = 0$$

que són les equacions d'Euler per a un fluid perfecte. O sigui que hem comprovat la possibilitat de començar un mètode d'aproximació de manera que les primeres equacions obtingudes siguin les admeses abans de la TRG, quedant les aproximacions següents com a correccions relativistes de l'antiga teoria.

Vegem què passa si fem $N = 1$; tenint present els resultats (V-19) i la forma dels S 's, hom troba que,

$$(V-22) \quad \overset{1}{S}_{\dot{c}\dot{c}} = 0, \quad \overset{2}{S}_{\dot{o}\dot{i}} = 0, \quad \overset{3}{S}_{\infty} = 0$$

o sigui que les equacions (V-12, 14) es compleixen trivialment, i, quant a les (V-8, 10, 11), ens permeten de prendre una condició de coordenades de manera que

$$(V-23) \quad \overset{3}{q}_{\infty} = 0, \quad \overset{2}{q}_{\dot{o}\dot{i}} = 0, \quad \overset{1}{q}_{\dot{c}\dot{j}} = 0$$

resultat ja anunciat de la possibilitat d'anul·lar els càlculs de l'ordre corres-

ponent a $N = 1$. Allò que se'n diu primera aproximació postnewtoniana correspon a $N = 2$. Els càlculs són semblants però molt més llargs, i aquí no els farem; hom ha arribat fins $N = 5$, que no és nul, perquè hi han raons físiques per a no escollir com a condició de coordenades a aquest ordre aquella que l'anul·laria, raons relacionades amb problemes de radiació. És freqüent d'utilitzar com a condició de coordenades la que hom anomena harmònica,

$$(V-24) \quad (\sqrt{g} \cdot g^{\mu\nu})_{, \nu} = 0$$

encara que no és l'única; a l'ordre 1-postnewtonià, Chandrasekhar ja n'utilitza una altra, i ha estat demostrat ⁽¹¹⁾ que dins els ordres calculats sempre hi ha una condició de coordenades tal que les equacions de moviment obtingudes donin trajectòries que són invariants pel grup de Poincaré dins l'ordre d'aproximació.

També cal dir que a l'ordre 1-postnewtonià les equacions de moviment són equivalents, si prenem simetria esfèrica, a les obtingudes per EIH, i ambdues es poden deduir d'una lagrangiana, possibilitat que desapareix als ordres següents, ⁽¹²⁾.

VI. Aproximació a partir d'un espai base ⁽¹³⁾

El problema de les equacions en variacions ha estat estudiat en primer lloc en Mecànica Celest, de cara a trobar la bona forma del moviment a partir d'un moviment veí i periòdic fàcil de resoldre però que no correspon a les condicions inicials reals del problema. En el cas de la TRG, suposarem que coneixem la mètrica sota unes certes condicions inicials, i es tracta de calcular una primera variació d'aquest resultat. Com abans, prendrem per al tensor impuls-energia un fluid perfecte, i les incògnites del problema seran

$$(VI-1) \quad \delta(g_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta} \quad , \quad \delta(\rho) = \bar{\rho} \quad , \quad \delta(p) = \bar{p} \quad , \quad \delta(u^\alpha) = \bar{u}^\alpha$$

per al primer membre de les equacions d'Einstein (I-1) hom obté:

$$(VI-2) \quad \delta(S_\alpha^\beta) = \frac{1}{2} \left[\Delta f_\alpha^\beta - 2R_{\alpha\lambda} f^{\beta\lambda} + \delta_\alpha^\beta R_{\rho\lambda} f^{\rho\lambda} + S_\alpha^\beta f_{\rho\rho}^\rho + \mathcal{O}K_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \nabla_\lambda K^\lambda \right]$$

on,

$$(VI-3) \quad \begin{cases} f_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^\lambda{}_\lambda g_{\alpha\beta} \\ (\mathcal{O}K)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha \quad ; \quad K_\beta = \nabla_\alpha f^\alpha{}_\beta \end{cases}$$

mentre que per al tensor $T^{\alpha\beta}$, hom arriba a:

$$(VI-4) \quad \delta(T_{\alpha\beta}) = (\bar{\rho} + \bar{p}) u_{\alpha} u_{\beta} + (\rho + p) (u_{\alpha} \bar{u}_{\beta} + \bar{u}_{\alpha} u_{\beta}) - \bar{p} g_{\alpha\beta} - p h_{\alpha\beta}$$

Per a nosaltres el problema és de trobar una mètrica que correspongui al cas físic d'un cos central de massa M i un segon cos de massa m , molt més petita que M , però no menyspreable. El cos central suposarem que té simetria esfèrica, i per tant la mètrica base o de partida serà la ben coneguda de Schwarzschild; els càlculs es fan dins l'aproximació de moviment lent i s'han fet fins a l'ordre 1-postnewtonià. Els resultats són que, si fem una redefinició de la primera variació de la densitat de energia,

$$(VI-5) \quad \bar{\rho} = \bar{m} \left(1 - \frac{1}{c^2} (u^2 - \frac{v^2}{2}) \right)$$

els efectes sobre la trajectòria es limiten a substituir M per la suma $M + m$.

El mateix mètode de variacions aplicat a la lagrangiana que es dedueix a l'ordre 1-postnewtonià tant del moviment lent com del ràpid i en el cas concret de dos cossos amb simetria esfèrica, dóna per a l'avanç del periheli el resultat conegut ⁽¹⁴⁾,

$$(VI-6) \quad \delta \bar{\omega} = \frac{G(m_1+m_2)}{c^2} \cdot \frac{6\pi}{a(1-e^2)} ; \quad a = \text{semieix} \quad , \quad e = \text{excentricitat}$$

però també dóna un retard de pas pel periheli,

$$(VI-7) \quad \delta \tau = - \frac{\pi}{na \cdot (1-e^2)} \cdot \frac{3G(m_1+m_2)}{c^2} \left\{ 6 - \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} (2-e) \right\}$$

Ambdues fórmules podrien actualment ésser comprovades en el sistema binari PSR-1913+16 que conté un pulsar ⁽¹⁵⁾.

Si bé en aquest paràgraf com en l'anterior considerem un fluid perfecte, els resultats sobre el moviment interior són pràcticament nuls, per tal com hom suposa que el dit moviment o no existeix (translació pura) o és una rotació uniforme. L'estudi del moviment de cossos extensos tenint en compte llur estructura multipolar serà l'objecte del capítol següent.

VII. El moviment de cossos extensos

Diversos intents han estat fets en el marc de la Teoria General de la Relativitat per tal d'incloure a les equacions del moviment els efectes deguts tant a la rotació dels cossos en consideració com a l'estructura interna

de cada un d'ells. Repassarem a continuació algunes de les maneres d'abordar el problema que han aparegut a la literatura sobre el tema. La primera que veurem postula una forma explícita per al tensor d'impuls-energia $T^{\mu\nu}$, i les altres dues no.

V. Fock ha tractat extensament aquest problema (vegeu ref. [10]), treballant a l'aproximació de petites velocitats fins a l'ordre 1-postnewtonià (1-PN). D'entrada postula una forma explícita per a cada component del tensor $T^{\mu\nu}$ a l'aproximació 1-PN. Així els N cossos en consideració són representats per N "gotes" d'un material elàstic i suposa que els diàmetres d d'aquestes "gotes" són petits comparats amb la distància L entre dues qualssevol d'entre elles: $d/L \ll 1$ a fi que siguin vàlides les aproximacions multipolars.

Treballa en un sistema de coordenades harmònic i lorentzià a l'infinit, i és en aquest que fa l'aproximació 1-PN. Més endavant suposa que a l'aproximació newtoniana els cossos són rígids, és a dir: el moviment de cada cos respecte al seu centre de masses és una rotació; la velocitat angular de la qual ha de satisfer: $\omega d/c \ll 1$ a fi que el marc d'aproximació 1-PN sigui vàlid.

El camí seguit per tal d'obtenir les equacions del moviment consisteix a prendre les equacions del camp i la condició de coordenades i fer aproximacions multipolars respecte al centre de masses de cada cos i basades en el sistema de coordenades abans esmentat. Per aquest procediment obté l'acceleració per a cada cos a l'aproximació 1-PN i quadripolar:

$$(VII-1) \quad \ddot{\vec{x}}_A = \vec{q}_A(\vec{x}_B, \dot{\vec{x}}_B, m_B, \vec{\omega}_B, I_B) + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad ; \quad A, B, C, \dots, F, \dots = 1, \dots, N$$

on: I_A és el moment d'inèrcia del cos A i $\vec{\omega}_A$ la seva velocitat angular.

Fins i tot dóna una lagrangiana total de la qual deriven les equacions (VII-1).

El primer mètode per a obtenir les equacions del moviment a l'aproximació dipolar d'una partícula de prova extensa en un camp gravitatori determinat fou donada per A. Papapetron (³). No postula cap forma particular per al tensor d'impuls-energia $T^{\mu\nu}$ de la partícula, però demana que el suport d'aquest estigui confinat en un tub d'univers espacialment acotat. Tampoc no fa cap aproximació en relació al modul de les velocitats. Treballa a l'aproximació dipolar, la qual cosa vol dir que en qualsevol instant el diàmetre del cos és petit comparat amb una longitud típica del camp gravitatori.

Pren un sistema de coordenades $\{x^\mu\}$ tal que x^0 sigui una coordenada temporal i una línia d'univers $L \equiv Z^p$ (s) dins el tub d'univers de la par-

tícula, i basant-se en això defineix els “moments multipolars”:

$$(VII-2) \quad m^{\mu\nu}_{(s)} \equiv u^0 \cdot \int_{x^0 = z^0(s)} \mathcal{E}^{\mu\nu} \cdot d^3x \quad ; \quad m^{\lambda\mu\nu}_{(s)} \equiv -u^0 \int_{x^0 = z^0(s)} \mathcal{E}^{\mu\nu} \cdot \delta x^\lambda \cdot d^3x$$

$$\text{on:} \quad u^\mu \equiv \frac{dz^\mu}{ds} \quad ; \quad \delta x^\lambda \equiv x^\lambda - z^\lambda(s)$$

A l'aproximació dipolar, tots els moments multipolars d'ordres superiors són menyspreats.

A l'aproximació dipolar obté les lleis de transformació d'aquests moments multipolars sota canvis de coordenades (òbviament no són covariants) i a partir d'ells defineix les quantitats covariants següents: l'escalar massa pròpia:

$$(VII-3.a) \quad m \equiv \frac{1}{u^0} \left(m^{\alpha 0} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^{\mu\nu} u^\nu \right) u_\alpha$$

i el tensor antisimètric de “spin”:

$$(VII-3.b) \quad S^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{u^0} \left(m^{\mu\nu 0} - m^{\nu\mu 0} \right)$$

Per fi, per desenvolupament multipolar de l'equació de conservació (I-3) obté les equacions de moviment següents:

$$(VII-4.a) \quad \frac{\delta}{\delta s} \left(m u^\alpha + u_\beta \cdot \frac{\delta S^{\alpha\beta}}{\delta s} \right) = -\frac{1}{2} S^{\mu\nu} u^\sigma R^\alpha_{\sigma\tau\mu}$$

$$(VII-4.b) \quad \frac{\delta S^{\mu\nu}}{\delta s} + u^\mu u_\alpha \cdot \frac{\delta S^{\alpha\nu}}{\delta s} - u^\nu u_\alpha \cdot \frac{\delta S^{\mu\alpha}}{\delta s} = 0$$

on $R^{\alpha}_{\nu\sigma\mu}$ és el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel.

Com hom pot observar, el sistema d'equacions (VII-4) és indeterminat, puix que té 10 incògnites $-m, u^i, s^{a\beta}$ — i tan sols 7 equacions, ja que per contracció de (4.b) amb u_a obtenim una identitat. Aquest inconvenient, força conegut ja a la mecànica newtoniana, és solucionat definint quina línia és L , mitjançant 3 condicions addicionals arbitràries conegudes amb el nom de “condicions de spin”.

El mateix Papapetrou diu que el seu mètode és aplicable a qualsevol ordre multipolar. Això no és del tot cert, per tal com la tria de les quantitats covariants (VII.3) en l'article de Papapetron és pràcticament intuïtiva i en augmentar l'ordre d'aproximació multipolar els càlculs esdevenen monstruosos i no hi há intuïció que hi valgui.

El darrer intent d'abordar el problema del moviment es concreta en una sèrie molt valuosa de treballs de W.G. Dixon (^{19, 20}). Aquest divideix el problema en dues parts: a) suposar coneguda la mètrica de l'espai-temps i buscar les equacions del moviment d'un cos (sense menysprear els efectes de la contribució al camp deguda a la pròpia partícula), i b) determinar el camp creat per un sistema de cossos suposant conegut llur moviment. Les referències esmentades s'ocupen de la primera part d'aquest programa.

Representa un cos extens per un tensor d'impuls-energia $T^{\mu\nu}$ confinat en un tub d'univers espacialment acotat. Si l'espai-temps admet un camp de Killing ξ_a :

$$(VII-5) \quad \mathfrak{Z}_{\alpha;\beta} + \mathfrak{Z}_{\beta;\alpha} = 0$$

tindrem a partir de (I-3) que la integral:

$$(VII-6) \quad E(\Sigma) = \int_{\Sigma} \mathfrak{F}^{\alpha\beta} \mathfrak{Z}_{\beta} \cdot d\Sigma_{\alpha}$$

no dependrà de la hipersuperfície espacial Σ considerada.

Un camp de Killing queda determinat si coneixem el seu valor i les seves derivades primeres en un punt z qualsevol:

$$(VII-7.a) \quad A_x = \mathfrak{Z}_x(z) \quad , \quad B_{x\lambda} = \mathfrak{Z}_{\lambda;x}(z)$$

és donat per:

$$(VII-7.b) \quad \mathfrak{Z}^{\alpha}(x) = K^{\alpha}_{\underline{x}}(x,z) A^{\underline{x}} + H^{\alpha}_{\underline{x}}(x,z) \sigma_{\underline{\lambda}}(x,z) B^{\underline{\lambda}}$$

essent K^a_x , H^a_x i σ_a bitensors dels punts (x, z) que estan relacionats amb les derivades de la funció univers $(^{21}) \sigma(x, z)^{(*)}$.

En substituir (VII-7.b) a (VII-6) obtenim:

$$(VII-8.a) \quad E(\Sigma) = p^x(z, \Sigma) \bar{z}_x(z) + \frac{1}{z} S^{x\lambda}(z, \Sigma) \cdot \bar{z}_{\lambda; x}(z)$$

essent (**):

$$(VII-8.b) \quad \begin{cases} p^x(z, \Sigma) = \int_{\Sigma} K^x_\alpha(x, z) \cdot \bar{z}^{\alpha\beta}(x) \cdot d\bar{\Sigma}_\beta(x) \\ S^{x\lambda}(z, \Sigma) = \int_{\Sigma} \mathcal{L} H_\alpha [x \sigma^{\lambda}] \bar{z}^{\alpha\beta} \cdot d\bar{\Sigma}_\beta \end{cases}$$

La relació ben coneguda a la Teoria Especial de la Relativitat entre moment lineal i moment angular amb els generadors infinitesimals del grup de Poincaré —els quals són camps de Killing de la mètrica de Minkowsky— suggereix a Dixon de prendre per definició p^x i $s^{x\lambda}$ com a moment lineal i moment angular respecte a z de la matèria continguda a Σ .

Si movem z sobre una línia temporal $z(s)$, tenint en compte que el primer membre de (VII-8.a) depèn de z , obtindrem, derivant (VII-8.a) respecte a s :

$$(VII-9) \quad A_x \left\{ \frac{\delta p^x}{\delta s} + \frac{1}{z} S^{\lambda\mu} v^\nu R_{\lambda\mu\nu}^x \right\} + \frac{1}{z} B_{x\lambda} \left\{ \frac{\delta S^{x\lambda}}{\delta s} - \mathcal{L} p^{[x} v^{\lambda]} \right\} = 0$$

Si ξ_a no és un camp de Killing el segon membre de (VII-9) ja no serà zero. En aquest cas el segon membre serà de la forma:

$$F^x A_x + \frac{1}{z} G^{x\lambda} B_{x\lambda}$$

on, per definició, F^x serà la força gravitatòria total i $G^{x\lambda}$ el moment gravitatori total sobre el cos. Les lleis del moviment s'escriuran:

$$(VII-10) \quad \begin{cases} \frac{\delta p^x}{\delta s} + \frac{1}{z} S^{\lambda\mu} v^\nu R_{\lambda\mu\nu}^x = F^x \\ \frac{\delta S^{x\lambda}}{\delta s} - \mathcal{L} p^{[x} v^{\lambda]} = G^{x\lambda} \end{cases}$$

essent: $v^x = \frac{\delta z^x}{\delta s}$

(*) Allà on hi hagi risc de confusió subratllarem els índexs tensorials al punt z , i no els que ho són a x .

(**) Un claudàtor vol dir antisimetrització.

Com en el cas del sistema (VII-4), les eq. (VII-10) no determinen F^x i $G^{x\lambda}$. Manca encara definir quina línia és $z^0(s)$ i quina hipersuperfície és $\Sigma(s)$.

Està demostrat ⁽²²⁾ que sota condicions febles sobre les dimensions del cos i la curvatura de l'espai-temps existeix una única línia $z(s)$ tal que:

$$(VII-11) \quad p_x(z(s), \Sigma_s) \cdot S^{x\lambda}(z(s), \Sigma_s) = 0$$

essent Σ_s la hipersuperfície formada per les geodèsiques ortogonals a $p_x(z(s), \Sigma_s)$ en el punt $z(s)$. Aquesta és, per definició, la línia del centre de masses.

La massa del cos és definida per l'escalar: $M \equiv (p^x p_x)^{1/2}$ essent p_x referit al centre de masses. El vector unitari $n^x \equiv M^{-1} p^x$ l'anomena *velocitat dinàmica* en contraposició a la *velocitat cinemàtica* v^x .

La relació entre ambdues velocitats ha estat obtinguda per Ehlers i Rudolph ⁽²³⁾ i depèn de M , $R^a_{\mu\nu\beta}$, $S^{x\lambda}$ i també de la força F^x i el moment $G^{x\lambda}$.

Els segons membres de les equacions (VII-10) $-F^x$ i $G^{x\lambda}$ donen compte de l'acció del camp gravitatori sobre el cos, la qual depèn d'allò que W.G. Dixon defineix com a *variables materials*, les quals estan relacionades amb els moments multipolars ⁽²⁰⁾ (quadripolar, octopolar, ...).

Les lleis de conservació (I-3) no determinen ni de bon tros l'evolució dels moments multipolars. Per tant, el sistema ⁽¹⁰⁾ es indeterminat si no en diem alguna cosa més. És en aquest sentit que en el cas newtonià hom pren, per exemple, la hipòtesi de rigidesa. Com ja és ben conegut, a la Teoria de la Relativitat General, la condició de rigidesa de Born-Rosen ⁽²¹⁾ és excessivament restrictiva. W.G. Dixon proposa una condició dinàmica de rigidesa, el significat físic de la qual està discutit a la ref. ⁽²⁴⁾.

Per últim, Dixon proposa una definició de l'autocamp per tal de separar en dues parts la força F^x i el moment total $G^{x\lambda}$:

$$F^x = F^x_{auto} + F^x_{ext} \quad , \quad G^{x\lambda} = G^{x\lambda}_{auto} + G^{x\lambda}_{ext}$$

i desenvolupa multipolarment els termes F^x_{ext} i $G^{x\lambda}_{ext}$, els quals depenen del camp gravitatori extern i de les seves derivades, així com dels moments multipolars.

Cal notar que a l'aproximació dipolar els termes F^x_{ext} i $G^{x\lambda}_{ext}$ són nuls, de manera que les equacions (VII-10) coincideixen amb les de Papapetrou (VII-4) si identifiquem:

$$S^{x\lambda}_{DIXON} \longleftrightarrow S^{x\lambda}_{PAP.} \quad i \quad p^x_{DIXON} \longleftrightarrow \left(m u^x - u_\beta \frac{\delta S^{\beta x}}{\delta \lambda} \right)_{PAP.}$$

Fins a aquest punt estava desenvolupat el programa de Dixon a l'estiu del 1976 (²⁴). La primera part (equacions de moviment d'un cos extens en un camp gravitatori donat) estava pràcticament coberta. Pel que fa a la segona (expressió del camp exterior en termes dels moments multipolars dels cossos que el creen) el propi Dixon confesava no tenir cap idea de com fer-ho.

VIII. Altres mètodes d'aproximació (¹⁶)

Anderson ha trobat una solució en forma integral de les equacions d'Einstein modificades per una condició de coordenades que té les propietats següents:

1. La mètrica verifica les condicions de coordenades harmòniques si i sols si es verifiquen les equacions de moviment.
2. Escollint com a solució formal la funció de Green retardada, es compleix la condició de radiació de Sommerfeld

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(1/r) \quad , \quad g_{\mu\nu,\rho} = i_{\mu\nu} k_{\rho} + O(1/r^2)$$

on $i_{\mu\nu} = 0$ ($1/r$) i k_{ρ} és un vector nul que estaria lligat a una possible ona gravitacional que s'escapa del sistema de cossos amb interacció.

La iteració es pot fer sota les hipòtesis del moviment lent, ja que en la zona de l'espai-temps propera als cossos podem pendre, $t - r/c \sim t$; fent un canvi de coordenades, els resultats obtinguts coincideixen a l'ordre 1-postnewtonià amb els de Chandrasekhar, obtinguts una mica més ràpidament. Pel fet d'estar fixades les coordenades per la condició de radiació citada, en pujar d'ordre, els càlculs són més difícils. Una comparació amb l'aproximació de moviment ràpid, que en aquest cas ha estat feta, prova que cal conèixer en el cas lent fins a $2N + 1$ si en el cas ràpid hom ha arribat fins a N .

Persides obté un altre tipus de desenvolupament en treballar amb la coordenada de temps retardada, $u = t - r/c$, i les tres d'espai, x, y, z . Suposa que les funcions que surten permeten el desenvolupament $\sum c^{-n} f^n(u, F)$.

Aquest formalisme és més coherent per a estudiar l'espai-temps complet sense separar la zona propera als cossos i la llunyana. Notem que en la zona llunyana tots els mètodes de moviment lent fins ara exposats fallen, perquè allà ja no serà cert que les derivades temporals siguin un ordre inferior a les espacials. Persides imposa com a condició de coordenades que la mètrica sigui del tipus r^{-1} a l'infinit, que encara no les fixa del tot. La citada millor coherència es paga amb la impossibilitat pràctica de passar de l'ordre 1-postnewtonià; tampoc, per ara, no ha pogut ésser calculada

la possible repercussió de la radiació sobre el moviment de les fonts.

Burke y Thorne tenen una sèrie de treballs en aproximacions destinats a aclarir el problema de junció entre les mètriques adequades a la zona propera als cossos i la llunyana. El mètode es basa en teories de pertorbacions singulars; el camí a seguir és el següent: a la zona de radiació o llunyana, els camps són febles i n'hi ha prou amb la part lineal de les equacions d'Einstein per a treure resultats acceptables amb tal de posar les bones condicions de contorn a l'infinit; a la zona propera als cossos, per contra, les equacions són no lineals però desapareixen les derivades temporals; amb aquestes dades cal fer la junció en una zona intermèdia, servint cada un dels resultats com a condició de contorn per a l'altre. En els càlculs fets fins ara no han estat adequades ni la condició de Sommerfeld (VIII-1) ni la de coordenades harmòniques (V-24) dins aquesta zona intermèdia. Un dels objectius principals és de poder calcular la força de reacció sobre els cossos si hi ha radiació. De moment som però només a la part lineal, i encara no hi ha resultats per a l'ordre postnewtonià.

Els problemes de radiació gravitacional que aquí estudiem dins un mètode d'aproximacions i per a un cas concret de cossos fets de fluid perfecte, també han estat estudiats des d'un punt de vista exacte i fent un parallelisme amb el cas del camp electromagnètic. Els resultats més brillants de moment continuen essent els de Bel ⁽¹⁷⁾, que donà una classificació dels tensors de Riemann-Weyl (emprada per tothom) i la definició d'un tensor que hom en diu de superenergia i que és la generalització del tensor de Maxwell del camp electromagnètic. Amb tot, continuen les dificultats, i potser la més important és la dificultat a definir una densitat d'energia o d'impuls-energia, per al camp gravitacional, que sigui tensorial.

En una reunió de treball tinguda a Gregynog, País de Galles (juny de 1979), i unes setmanes més tard renovada a Dublín, Irlanda, han estat donats els últims resultats sobre equacions de moviment en TRG enfocats sobretot a aclarir el moviment del pulsar del sistema binari ja citat ⁽¹⁵⁾. No hi ha grans novetats, i un resum d'allò que fou dit es troba a ⁽¹⁸⁾.

BIBLIOGRAFIA:

- (¹) Infeld L., Plebansky J., "Motion and Relativity", Pergamon Press, 1960.
- (²) Einstein A., Grommer J., Sitzber. Preuss. Akd. Wiss., 2-13 i 235-245, 1927.

- (³) Papapetrou A., Proc. Roy. Soc. *A209*, 248, 1951.
- (⁴) Havas P., Goldberg J.N., Phys. Rev. *128*, 398, 1962.
- (⁵) Mathisson M., Acta Phys. Polon., *6*, 163, 1937.
- (⁶) Bielecki A., Mathisson M., Weyssenhoff J., Bull. Inter. Acad. Polon. A, *22*, 1939.
- (⁷) Havas P., LXVII curs de Varenna, a publicar per North Holland.
- (⁸) Einstein A., Infeld L., Hoffmann B., Ann. Math. *39*, 65, 1939.
- (⁹) Guelfand I.M., Chilov G.E., "Les distributions", Dunod, 1962.
- (¹⁰) Fock V., "the theory of space, time and gravitation" Pergamon Press, 1959.
 Papapetrou A., Proc. Phys. Soc. *A64*, 57-75, 1951.
 Chandrasekhar S., Esposito F.P., Ap. J. *160*, 153, 1970.
 Mas L., Verdaguer E., C.R. Acad. Sc. París, *282*, A551 i A1059, 1976.
- (¹¹) Verdaguer E., Ann. Inst. Henri Poincaré.
- (¹²) Martín J., Sanz J.L., J. Math. Phys. *19*, 780, 1978.
 Lapedra R., tesi, Universitat de Barcelona, 1973.
- (¹³) Chazy J., "Mécanique Céleste", Presses Universitaires de France, 1953.
 Blancheton E., C.R. Acad. Sc. París, *245*, 284, 1957.
 Mas L., Ann. Inst. Henri Poincaré, *AVII*, 1, 1967.
- (¹⁴) Robertson H.P., Ann. Math. *39*, 101, 1938.
- (¹⁵) Hulse R.A., Taylor J.H., Ap. J., *195*, L51, 1975.
- (¹⁶) Anderson J.L., Gen. Grav. *4*, 289, 1973.
 Persides S., Ap. J. *170*, 479, 1971.
 Burke W.L., Thorne K.S., "Relativity" editor M. Carmeli, Plenna Press, 1970.
- (¹⁷) Bel L. C.R., Acad. Sc. París, *247*, 1094, 1958 i *248*, 1297, 1959.

- (¹⁸) Mac Callum M., *Nature* 280, 449, 9 August 1979.
- (¹⁹) Dixon W.G., *Proc. R. Soc. London A*314, 499, 1970.
*Proc. R. Soc. London A*319, 509, 1970.
Gen. Rel. Grav. 8, 595, 1977.
- (²⁰) Dixon W.G., *Gen. Rel. Grav.* 4, 199, 1973.
- (²¹) Synge J.L., "Relativity, the General Theory" North-Holland, 1960.
- (²²) Beiglbock W., *Commun. Math. Phys.* 5, 106, 1967.
- (²³) Ehlers J., Rudolph E., *Gen. Rel. Grav.* 8, 197, 1977.
- (²⁴) Dixon W.G., International School of Physics "Enrico Fermi"
LXVII Course, Varenna, 1976.